SET-2

Series BVM/5

कोड नं.
Code No. **65/5/2**

रोल नं.
Roll No.

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

*(ii) इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में **4** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **8** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **दो अंक** का है । खण्ड स में **11** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड द में **6** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।

(iv) पूर्ण प्रश्न-पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी खण्ड अ के 1 प्रश्न, खण्ड ब के 3 प्रश्नों में, खण्ड स के 3 प्रश्नों में तथा खण्ड द के 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।

*(v) कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

*(ii) The question paper consists of **29** questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of **4** questions of **one mark** each, Section B comprises of **8** questions of **two marks** each, Section C comprises of **11** questions of **four marks** each and Section D comprises of **6** questions of **six marks** each.*

(iii) All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.

(iv) There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 1 question of Section A, 3 questions of Section B, 3 questions of Section C and 3 questions of Section D. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.

*(v) Use of calculators is **not** permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. यदि A कोटि 2 का एक वर्ग आव्यूह है और $|A| = 4$ है, तो $|2 . AA'|$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ A', आव्यूह A का परिवर्त है ।

If A is a square matrix of order 2 and $|A| = 4$, then find the value of $|2 . AA'|$, where A' is the transpose of matrix A.

2. रेखा $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda (3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ और समतल $\vec{r} . (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 3$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए ।

अथवा

उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ रेखा $\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{5}$, yz-समतल को काटती है ।

Find the angle between the line $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 3$.

OR

Find the co-ordinates of the point, where the line $\frac{x+2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+1}{5}$ cuts the yz-plane.

3. वक्रों $y = -A \cos 3x + B \sin 3x$ के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the differential equation representing the family of curves $y = -A \cos 3x + B \sin 3x$.

4. फलन $\cos^{-1}(\sin 2x)$ का, x के सापेक्ष अवकलज ज्ञात कीजिए ।

Find the differential of the function $\cos^{-1}(\sin 2x)$ w.r.t. x.

खण्ड ब
SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।
Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. यदि पूर्णांकों के समुच्चय Z में $a * b = 2a^2 + b$ द्वारा परिभाषित $*$ एक संक्रिया है, तो ज्ञात कीजिए कि (i) क्या यह एक द्विआधारी संक्रिया है या नहीं, तथा (ii) यदि द्विआधारी संक्रिया है, तो क्या यह क्रमविनिमेय है या नहीं ।

If an operation $*$ on the set of integers Z is defined by $a * b = 2a^2 + b$, then find (i) whether it is a binary or not, and (ii) if a binary, then is it commutative or not.

6. अच्छी प्रकार से फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक के बाद एक चार पत्ते प्रतिस्थापना सहित निकाले गए । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कम-से-कम तीन पत्ते ईंट के आए ।

अथवा

दो विद्यार्थियों A और B के विद्यालय में समय पर आने की प्रायिकताएँ क्रमश: $\frac{2}{7}$ और $\frac{4}{7}$ हैं । मानिए कि 'A समय पर आता है' और 'B समय पर आता है' स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उनमें से केवल एक ही विद्यालय में समय पर आता है ।

Four cards are drawn one by one with replacement from a well-shuffled deck of playing cards. Find the probability that at least three cards are of diamonds.

OR

The probability of two students A and B coming to school on time are $\frac{2}{7}$ and $\frac{4}{7}$, respectively. Assuming that the events 'A coming on time' and 'B coming on time' are independent, find the probability of only one of them coming to school on time.

7. आव्यूह समीकरण $2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$ से $(x - y)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Find the value of $(x - y)$ from the matrix equation

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}.$$

8. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(y + 3x^2)\frac{dx}{dy} = x$$

Solve the following differential equation :

$$(y + 3x^2)\frac{dx}{dy} = x$$

9. सदिशों के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (2, – 1, 3), (3, – 5, 1) और (– 1, 11, 9) संरेख हैं ।

अथवा

किन्हीं दो सदिशों $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \, \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

Using vectors, prove that the points (2, – 1, 3), (3, – 5, 1) and (– 1, 11, 9) are collinear.

OR

For any two vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, prove that

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \, \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

10. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \, dx$$

अथवा

x के सापेक्ष समाकलन कीजिए :

$$\frac{e^x}{\sqrt{5 - 4e^x - e^{2x}}}$$

Find :

$$\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \, dx$$

OR

Integrate :

$$\frac{e^x}{\sqrt{5 - 4e^x - e^{2x}}} \text{ with respect to x.}$$

11. ज्ञात कीजिए :

$$\int e^x \left(\frac{2 + \sin 2x}{2 \cos^2 x} \right) dx$$

Find :

$$\int e^x \left(\frac{2 + \sin 2x}{2 \cos^2 x} \right) dx$$

12. यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = \frac{3}{7}$ तथा $P(B) = \frac{2}{5}$ है, तो $P(A' \cap B')$ ज्ञात कीजिए ।

If A and B are independent events with $P(A) = \frac{3}{7}$ and $P(B) = \frac{2}{5}$, then find $P(A' \cap B')$.

खण्ड स
SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।
Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. बिंदु (–1, 3, 2) से गुज़रने वाले तथा समतलों $x + 2y + 3z = 5$ और $3x + 3y + z = 0$ में से प्रत्येक पर लंब वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the equation of the plane passing through the point (–1, 3, 2) and perpendicular to the planes $x + 2y + 3z = 5$ and $3x + 3y + z = 0$.

14. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_1^5 (|x-1| + |x-2| + |x-4|)\, dx$$

Evaluate :

$$\int_1^5 (|x-1| + |x-2| + |x-4|)\, dx$$

15. यदि x, y, z भिन्न हैं तथा $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3-1 \\ y & y^2 & y^3-1 \\ z & z^2 & z^3-1 \end{vmatrix} = 0$ है, तो सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, दर्शाइए कि $xyz = 1$ है ।

If x, y, z are different and $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3-1 \\ y & y^2 & y^3-1 \\ z & z^2 & z^3-1 \end{vmatrix} = 0$, then using properties of determinants, show that $xyz = 1$.

16. सिद्ध कीजिए कि :

$$\sin^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{5}{12} + \cos^{-1}\frac{63}{65} = \frac{\pi}{2}$$

Prove that :

$$\sin^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{5}{12} + \cos^{-1}\frac{63}{65} = \frac{\pi}{2}$$

17. सदिशों के प्रयोग से x का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि चार बिन्दु A(x, 5, – 1), B(3, 2, 1), C(4, 5, 5) तथा D(4, 2, – 2) समतलीय हो जाएँ ।

Using vectors, find the value of x such that the four points A(x, 5, – 1), B(3, 2, 1), C(4, 5, 5) and D(4, 2, – 2) are coplanar.

18. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ के सापेक्ष $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ का अवकलन कीजिए ।

अथवा

यदि $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, $|x| < 1$, $|y| < 1$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$.

Differentiate $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$, $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ w.r.t. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

OR

If $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, $|x| < 1$, $|y| < 1$, show that $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$.

19. सिद्ध कीजिए कि समुच्चय A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} में R = {(a, b) : |a – b| सम है} द्वारा प्रदत्त संबंध R एक तुल्यता संबंध है ।

अथवा

दर्शाइए कि $A = R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ में, $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी और आच्छादक है । अत:, f^{-1} ज्ञात कीजिए ।

Prove that the relation R in the set A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} given by R = {(a, b) : $|a - b|$ is even} is an equivalence relation.

OR

Show that the function f in $A = R - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ defined as $f(x) = \frac{4x+3}{6x-4}$ is one-one and onto. Hence, find f^{-1}.

20. अवकल समीकरण $(1 + e^{2x})\, dy + (1 + y^2)\, e^x\, dx = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि $y(0) = 1$ है ।

अथवा

अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx}\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x - y\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है $y(1) = \frac{\pi}{2}$ है ।

Find the particular solution of the differential equation :
$(1 + e^{2x})\, dy + (1 + y^2)\, e^x\, dx = 0$, given that $y(0) = 1$.

OR

Find the particular solution of the differential equation :
$x\frac{dy}{dx}\sin\left(\frac{y}{x}\right) + x - y\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, given that $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

21. यदि $y = (\sin x)^x + \sin^{-1}(\sqrt{1 - x^2})$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

If $y = (\sin x)^x + \sin^{-1}(\sqrt{1 - x^2})$, then find $\frac{dy}{dx}$.

22. ज्ञात कीजिए :

$$\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x\, dx$$

Find :

$$\int \cos 2x \cos 4x \cos 6x\, dx$$

23. वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिसमें $f(x) = \sin 2x + \cos 2x, 0 \le x \le \pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f निरन्तर ह्रासमान है ।

Find the interval in which the function f given by

$f(x) = \sin 2x + \cos 2x, 0 \le x \le \pi$ is strictly decreasing.

खण्ड द

SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. प्रारम्भिक पंक्ति रूपान्तरणों द्वारा आव्यूह $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए ।

अथवा

आव्यूहों का प्रयोग कर निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$2x + 3y + 10z = 4$$
$$4x - 6y + 5z = 1$$
$$6x + 9y - 20z = 2$$

Using elementary row transformations, find the inverse of the matrix

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

OR

Using matrices, solve the following system of linear equations :

$$2x + 3y + 10z = 4$$
$$4x - 6y + 5z = 1$$
$$6x + 9y - 20z = 2$$

25. समाकलन के प्रयोग से निम्नलिखित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए :

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16a^2 \text{ और } y^2 \leq 6ax\}$$

अथवा

समाकलन के प्रयोग से ऐसे त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $4x - y + 5 = 0$, $x + y - 5 = 0$ और $x - 4y + 5 = 0$ से परिबद्ध है ।

Using integration, find the area of the following region :

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16a^2 \text{ and } y^2 \leq 6ax\}$$

OR

Using integration, find the area of triangle ABC bounded by the lines $4x - y + 5 = 0$, $x + y - 5 = 0$ and $x - 4y + 5 = 0$.

26. एक कम्पनी प्लाइवुड के दो प्रकार के अनूठे स्मृतिचिह्नों का निर्माण करती है । A प्रकार के प्रति स्मृतिचिह्न के निर्माण में 5 मिनट काटने और 10 मिनट जोड़ने में लगते हैं । B प्रकार के प्रति स्मृतिचिह्न के लिए 8 मिनट काटने और 8 मिनट जोड़ने में लगते हैं । दिया गया है कि काटने के लिए कुल समय 3 घंटे 20 मिनट तथा जोड़ने के लिए 4 घंटे उपलब्ध हैं । प्रत्येक A प्रकार के स्मृतिचिह्न पर ₹ 100 और प्रत्येक B प्रकार के स्मृतिचिह्न पर ₹ 120 का लाभ होता है । ज्ञात कीजिए कि लाभ के अधिकतमीकरण के लिए प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने स्मृतिचिह्नों का कंपनी द्वारा निर्माण होना चाहिए । रैखिक प्रोग्रामन समस्या बना कर इसे ग्राफ द्वारा हल कीजिए ।

A company manufactures two types of novelty souvenirs made of plywood. Souvenirs of type A require 5 minutes each for cutting and 10 minutes each for assembling. Souvenirs of type B require 8 minutes each for cutting and 8 minutes each for assembling. There are 3 hours 20 minutes available for cutting and 4 hours for assembling. The profit for type A souvenirs is ₹ 100 each and for type B souvenirs, profit is ₹ 120 each. How many souvenirs of each type should the company manufacture in order to maximise the profit ? Formulate the problem as a LPP and then solve it graphically.

27. बिंदु (2, 1, – 1) से गुज़रने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि रेखा $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ के समांतर है । अत: इन दोनों रेखाओं के बीच की दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

बिंदु P(1, 3, 4) से समतल $2x - y + z + 3 = 0$ पर खींचे गए लंब के पाद Q के निर्देशांक ज्ञात कीजिए । लम्बवत् दूरी PQ तथा समतल को दर्पण लेते हुए इस बिंदु P का प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए ।

Find the vector equation of the line passing through (2, 1, – 1) and parallel to the line $\vec{r} = (\hat{i} + \hat{j}) + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$. Also, find the distance between these two lines.

OR

Find the coordinates of the foot Q of the perpendicular drawn from the point P(1, 3, 4) to the plane $2x - y + z + 3 = 0$. Find the distance PQ and the image of P treating the plane as a mirror.

28. 52 पत्तों की एक ताश की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है । शेष पत्तों की गड्डी में से यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापना के) दो पत्ते निकाले जाते हैं तथा यह दोनों हुकुम के पत्ते पाए जाते हैं । खो गए पत्ते के हुकुम के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ।

A card from a pack of 52 playing cards is lost. From the remaining cards of the pack, two cards are drawn at random (without replacement) and both are found to be spades. Find the probability of the lost card being a spade.

29. सिद्ध कीजिए कि एक दिए गए शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल वाले लंबवृत्तीय बेलन की त्रिज्या, शंकु की त्रिज्या की आधी होती है ।

Prove that the radius of the right circular cylinder of greatest curved surface area which can be inscribed in a given cone is half of that of the cone.