

**0166****A**

Total No. of Questions—24

Total No. of Printed Pages—4

Regd. No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Part III

**MATHEMATICS, Paper - I(A)**

(English Version)

**Time : 3 Hours]****[Max. Marks : 75****Note :—**This question paper consists of *three* Sections A, B and C.**SECTION A****I. Very Short Answer Type Questions :** 10×2=20(i) Answer **ALL** questions.(ii) Each question carries **TWO** marks.**1.** If  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is defined by  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ , then show that :

$$f(\tan \theta) = \cos 2\theta.$$

**2.** Find the domain of the real valued function :

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 3)}.$$

**3.** If

$$\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

then find the values of  $x$ ,  $y$ ,  $z$  and  $a$ .**4.** Define Rank of a matrix.**5.** If the vectors  $-3\bar{i} + 4\bar{j} + \lambda\bar{k}$  and  $\mu\bar{i} + 8\bar{j} + 6\bar{k}$  are collinear vectors, then find  $\lambda$  and  $\mu$ .

0166-A

P.T.O.

6. Find the vector equation of the plane passing through the points  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 5, 0)$  and  $(2, 0, 1)$ .
7. Find the angle between the planes  $\vec{r} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 3$  and  $\vec{r} \cdot (3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}) = 4$ .
8. Find a cosine function whose period is 7.
9. What is the value of  $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$  ?
10. For any  $x \in \mathbb{R}$ , prove that  $\cosh^4 x - \sinh^4 x = \cosh(2x)$ .

**SECTION B**

II. Short Answer Type Questions : 5×4=20

(i) Answer **ANY FIVE** questions.

(ii) Each question carries **FOUR** marks.

11. If  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , then find  $A^4$ .

12. If the points whose position vectors are  $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ,  $-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  and  $4\vec{i} + 5\vec{j} + \lambda\vec{k}$  are coplanar, then show that :

$$\lambda = \frac{-146}{17}.$$

13. If  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 5$  and  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 60$ , then find  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .

14. Prove that :

$$\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

15. Solve the equation :

$$\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}.$$

16. Prove that :

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

17. In  $\Delta ABC$ , show that :

$$b \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{B}{2} = s.$$

### SECTION C

III. Long Answer Type Questions :

5×7=35

(i) Answer **ANY FIVE** questions.

(ii) Each question carries **SEVEN** marks.

18. If  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  be bijections, then show that :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

19. Using mathematical induction, prove the statement :

$$a + ar + ar^2 + \dots \text{ upto } n \text{ terms} = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}, \quad r \neq 1.$$

20. If

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{and} \quad \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

then show that :

$$abc = -1.$$

21. Solve the system of equations

$$x + y + z = 1, \quad 2x + 2y + 3z = 6, \quad x + 4y + 9z = 3$$

by using Cramer's rule.

22. Find the volume of the tetrahedron whose vertices are (1, 2, 1), (3, 2, 5), (2, -1, 0) and (-1, 0, 1).

23. If A, B, C are angles in a triangle, then prove that :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

24. If  $r : R : r_1 = 2 : 5 : 12$ , then prove that the triangle is right angled at A.

**0167****A**

Total No. of Questions—24

Total No. of Printed Pages—4

Regd. No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Part III

**MATHEMATICS, Paper - I(A)**

(Telugu Version)

**Time : 3 Hours]****[Max. Marks : 75**

గమనిక:— ఈ ప్రశ్నాపత్రంలో A, B మరియు C అనే మూడు విభాగాలున్నాయి.

విభాగము A

I. 'అతి స్వల్ప' సమాధాన ప్రశ్నలు : 10×2=20

(i) అన్ని ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయండి.

(ii) ప్రతి ప్రశ్నకు రెండు మార్కులు.

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ను  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  గా నిర్వచిస్తే : $f(\tan \theta) = \cos 2\theta$  అని చూపండి.2.  $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)}$  వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశాన్ని కనుక్కోండి.3. 
$$\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 అయితే $x, y, z$  మరియు  $a$  ల విలువలు కనుక్కోండి.

4. మాత్రిక కోటిని నిర్వచించండి.

5. సదిశలు  $-3\vec{i} + 4\vec{j} + \lambda\vec{k}$  మరియు  $\mu\vec{i} + 8\vec{j} + 6\vec{k}$  సరేఖీయాలైతే  $\lambda$  మరియు  $\mu$  లను కనుక్కోండి.

0167-A

P.T.O.

6.  $(0, 0, 0), (0, 5, 0), (2, 0, 1)$  బిందువుల గుండా పోయే తలం నదిశా నమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.
7.  $\vec{r} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 3, \vec{r} \cdot (3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}) = 4$  తలాల మధ్యకోణం కనుక్కోండి.
8. అవర్తనం 7 గా గల ఒక  $\cos$  ప్రమేయాన్ని కనుక్కోండి.
9.  $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$  విలువను కనుక్కోండి.
10. ప్రతి  $x \in \mathbb{R}$  కు  $\cosh^4 x - \sinh^4 x = \cosh(2x)$  అని నిరూపించండి.

## విభాగము B

II. స్వల్ప నమాధాన ప్రశ్నలు :

5×4=20

- (i) ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు నమాధానాలివ్వండి.
- (ii) ప్రతి ప్రశ్నకు నాలుగు మార్కులు.

11.  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  అయితే  $A^4$  ని కనుక్కోండి.

12.  $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}, 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}, -\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}, 4\vec{i} + 5\vec{j} + \lambda\vec{k}$  నదికలను స్థాన నదికలుగా గల బిందువులు నతలియాలైతే  $\lambda$  విలువ :

$$= \frac{-146}{17} \text{ అని చూపండి.}$$

13.  $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = 60$ , అయితే  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  ని కనుక్కోండి.

14.  $\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$  అని నిరూపించండి.

15.  $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$  నమీకరణంను సాధించండి.

[ 3 ]

16.  $\sin^{-1}\frac{4}{5} + 2 \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$  అని రుజువు చేయండి.

17. త్రిభుజం ABC లో :

$$b \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{B}{2} = s \text{ అని చూపండి.}$$

విభాగము C

III. దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు :

5×7=35

(i) ఏవైనా ఐదు ప్రశ్నలకు సమాధానాలివ్వండి.

(ii) ప్రతి ప్రశ్నకు ఏడు మార్కులు

18.  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  లు ద్వీగుణ ప్రమేయాలైతే :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \text{ అని చూపండి.}$$

19. గణితానుగమన పద్ధతిని ఉపయోగించి, ప్రతి  $n \in \mathbb{N}$  కు :

$$a + ar + ar^2 + \dots (n \text{ పదాలవరకు}) = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}, r \neq 1 \text{ అని చూపండి.}$$

20. 
$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

అయితే  $abc = -1$  అని చూపండి.

21. క్రేమర్ నియమమును ఉపయోగించి :

$$x + y + z = 1, 2x + 2y + 3z = 6, x + 4y + 9z = 3$$

సమీకరణాలను సాధించండి.

0167-A

P.T.O.

22.  $(1, 2, 1), (3, 2, 5), (2, -1, 0), (-1, 0, 1)$ . శీర్షాలుగా గల చతుర్భుజి ఘన పరిమాణాన్ని కనుక్కోండి.

23. A, B, C లు త్రిభుజి కోణాలైతే :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \text{ అని నిరూపించండి.}$$

24.  $r : R : r_1 = 2 : 5 : 12$  అయితే, ఆ త్రిభుజంలో A లంబకోణమని రుజువు చేయండి.



**0168****A**

Total No. of Questions- 24

Total No. of Printed Pages- 4

Regd. No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Part III

**MATHEMATICS, Paper - I(A)**

(Urdu Version)

Time : 3 Hours]

[Max. Marks : 75

نوٹ : یہ سوالیہ پرچہ تین سیکشن A، B اور C پر مشتمل ہے۔  
سیکشن A

10×2=20

I. نہایت مختصر جوابی سوالات :

(i) تمام سوالات حل کیجئے۔

(ii) ہر سوال کے دو (2) نشانات مقرر ہیں۔

1. اگر  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  کی تعریف  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  سے کی گئی ہے، تب بتائیے کہ

$$f(\tan \theta) = \cos 2\theta.$$

2. حقیقی قدر والے تفاعل  $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)}$  کا علاقہ (Domain) معلوم کیجئے۔

3. اگر

$$\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تب  $x$ ،  $y$ ،  $z$  اور  $a$  کی قدریں معلوم کیجئے۔

4. ماترں کے مرتبہ (Rank) کی تعریف کیجئے۔

P.T.O.

0168-A

[ 2 ]

5. اگر سمتیاں  $-3\bar{i} + 4\bar{j} + \lambda\bar{k}$  اور  $\mu\bar{i} + 8\bar{j} + 6\bar{k}$  ہم خط سمتیاں ہیں تب  $\lambda$  اور  $\mu$  معلوم کیجئے۔

6. مستوی (Plane) کی سمتی مساوات معلوم کیجئے جو نقاط  $(0, 0, 0)$ ،  $(0, 5, 0)$  اور  $(2, 0, 1)$  سے گذرتی ہے۔

7. مستویوں  $\bar{r} \cdot (2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 3$  اور  $\bar{r} \cdot (3\bar{i} + 6\bar{j} + \bar{k}) = 4$  کا درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

8. کوسائن (cosine) تفاعل معلوم کیجئے جب کہ اس کا دور (Period) '7' ہے۔

9.  $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$  کی قدر معلوم کیجئے۔

10. کوئی  $x \in \mathbb{R}$  کے لئے، بتائیے کہ:

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = \cosh(2x)$$

5×4=20

سیکشن B

II مختصر جوابی سوالات:

(i) کوئی پانچ سوالات حل کئے جائیں۔

(ii) ہر سوال کے چار (4) نشانات مقرر ہیں۔

11. اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  تب  $A^4$  معلوم کیجئے۔

12. اگر نقاط جنکے مقام سمتیاں ترتیب وار  $3\bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k}$ ،  $2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$ ،  $-\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$  اور

$4\bar{i} + 5\bar{j} + \lambda\bar{k}$  مطابق (Coplanar) ہیں تب بتائیے کہ

$$\lambda = \frac{-146}{17}$$

13. اگر  $|\bar{a}| = 13$ ،  $|\bar{b}| = 5$  اور  $\bar{a} \cdot \bar{b} = 60$  تب  $|\bar{a} \times \bar{b}|$  معلوم کیجئے۔

14. بتائیے کہ:

$$\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$$

0168-A

15. مساوات کو حل کیجئے :

$$\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}.$$

16. بتائیے کہ :

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$$

17. کوئی مثلث ABC میں بتائیے کہ :

$$b \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{B}{2} = s$$

سیکشن C

5×7=35

III. طویل جوابی سوالات :

(i) کوئی پانچ سوالات حل کیجئے۔

(ii) ہر سوال کے سات (7) نشانات مقرر ہیں۔

18. اگر  $f: A \rightarrow B$  اور  $g: B \rightarrow C$  دو راجعی (bijections) تفاعل ت ہیں تب بتائیے کہ :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

19. ریاضیاتی استقراء کے اصول کو استعمال کرتے ہوئے (Mathematical induction) بتائیے کہ :

$$a + ar + ar^2 + \dots + \text{ارکان تک } n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

جبکہ  $r \neq 1$  ہو۔

20. اگر

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ اور } \begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$$

تب بتائیے کہ :

$$abc = -1.$$

P.T.O.

0168-A

21. مساواتوں کے نظام

$$x + y + z = 1, 2x + 2y + 3z = 6, x + 4y + 9z = 3$$

کو کرائمرس (Cramer's) کے طریقہ سے حل کیجئے۔

22. چار سطحی (Tetrahedron) کا حجم معلوم کیجئے جس کے راس  $(1, 2, 1)$ ,  $(3, 2, 5)$ ,  $(2, -1, 0)$  اور

$(-1, 0, 1)$  ہیں۔

23. اگر  $A, B, C$  مثلث کے زاویے ہیں تب بتائیے کہ:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

24. اگر  $r : R : r_1 = 2 : 5 : 12$  تب بتائیے کہ مثلث قائم الزاویہ بناتا ہے A پر۔

**0169****A**

Total No. of Questions—24

Total No. of Printed Pages—4

Regd. No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Part III

**MATHEMATICS, Paper - I(A)**

(Hindi Version)

**Time : 3 Hours]****[Max. Marks : 75**

नोट :—इस प्रश्न-पत्र में तीन विभाग A, B, C हैं।

विभाग A

I. अति लघु उत्तर वाले प्रश्न : 10×2=20

(i) सभी प्रश्न हल कीजिए।

(ii) प्रत्येक प्रश्न के लिए 2 अंक हैं।

1. यदि  $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$  द्वारा परिभाषित  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  है, तो बताइये कि :

$$f(\tan \theta) = \cos 2\theta$$

2.  $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)}$  वास्तविक मूल फलन का प्रान्त (domain) ज्ञात कीजिए।

3. यदि

$$\begin{bmatrix} x-1 & 2 & 5-y \\ 0 & z-1 & 7 \\ 1 & 0 & a-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

है, तो  $x$ ,  $y$ ,  $z$  और  $a$  का मान ज्ञात कीजिए।

4. मैट्रिक्स की श्रेणी (Rank) की परिभाषा लिखिये।

5. यदि  $-3\bar{i} + 4\bar{j} + \lambda\bar{k}$  और  $\mu\bar{i} + 8\bar{j} + 6\bar{k}$  संरेखीय सदिश हैं, तो  $\lambda$  और  $\mu$  ज्ञात कीजिए।

0169-A

P.T.O.

6.  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 5, 0)$  और  $(2, 0, 1)$  बिन्दुओं से जाने वाली समतल का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।
7.  $\vec{r} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 3$  और  $\vec{r} \cdot (3\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}) = 4$  समतलों के बीच कोण ज्ञात कीजिए।
8. आवर्तन (Period) 7 रहने वाली cosine फलन को ज्ञात कीजिए।
9.  $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ \tan 40^\circ$  का मान ज्ञात कीजिए।
10. किसी  $x \in \mathbb{R}$  में सिद्ध कीजिए  $\cosh^4 x - \sinh^4 x = \cosh(2x)$ ।

## विभाग B

II. लघु उत्तर वाले प्रश्न :

5×4=20

(i) किन्हीं पाँच प्रश्नों को हल कीजिए।

(ii) प्रत्येक प्रश्न के लिए 4 अंक नियत हैं।

11. यदि  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  है, तो  $A^4$  ज्ञात कीजिए।

12. यदि बिन्दुओं की सदिशें  $3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ ,  $2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ ,  $-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$  और  $4\vec{i} + 5\vec{j} + \lambda\vec{k}$  समतलीय (Coplanar) हैं, तो बताइये कि :

$$\lambda = \frac{-146}{17}$$

13. यदि  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 5$  और  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 60$  है, तो  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  ज्ञात कीजिए।

14. सिद्ध कीजिए :

$$\cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{8\pi}{7} = \frac{1}{8}$$

15.  $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$  समीकरण को हल कीजिए।

0169-A

[ 3 ]

16. सिद्ध कीजिए :

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$$

17.  $\Delta ABC$  में बताइये कि  $b \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{B}{2} = s$

विभाग C

III. दीर्घ उत्तर वाले प्रश्न :

5×7=35

- (i) किन्हीं 5 प्रश्नों को हल कीजिए।  
(ii) प्रत्येक प्रश्न के लिए 7 अंक नियत हैं।

18. यदि  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  आच्छादी (Bijections) हैं, तो बताइये कि :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

19. गणितीय आगमन पद्धति द्वारा सिद्ध कीजिए :

$$a + ar + ar^2 + \dots n \text{ पदों तक} = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}, r \neq 1$$

20. यदि

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0 \text{ और } \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

है, तो बताइये कि

$$abc = -1.$$

21. क्रैमर (Cramer) पद्धति द्वारा निम्न समीकरणों को हल कीजिए :

$$x + y + z = 1, 2x + 2y + 3z = 6, x + 4y + 9z = 3$$

0169-A

P.T.O.

22. (1, 2, 1), (3, 2, 5), (2, -1, 0) और (-1, 0, 1) शीर्षों वाले चतुष्फलक का आयतन (Volume) ज्ञात कीजिए।

23. यदि A, B, C त्रिभुज के कोण हैं, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

24. यदि  $r : R : r_1 = 2 : 5 : 12$  है, तो सिद्ध कीजिए त्रिभुज A पर समकोण बनाता है।