अनुक्रमांक ..... मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 8

नाम .....

131

324 (EX)

2024

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] *[पूर्णांक : 100*

निर्देश :

(i) *प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्न-पत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न-पत्र में कुल नौ प्रश्न हैं ।*

(iii) ***सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(iv) *प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः उल्लेख किया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं ।*

(v) *प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं ।*

(vi) *प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अंत तक करते जाइए ।*

(vii) *जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए ।*

---

1. ***सभी** खण्ड कीजिए :*

प्रत्येक खण्ड का सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए ।

(क) यदि आव्यूह A और B के क्रम क्रमशः $p \times q$ और $q \times r$ हैं, तो AB का क्रम है : 1

(i) $p \times r$ (ii) $r \times p$

(iii) $q \times p$ (iv) इनमें से कोई नहीं

(ख) किस बिन्दु पर रेखा $y = x + 1$ की ढाल वक्र $y^2 = 4x$ की ढाल के बराबर होगी ? 1

(i) $(1, 2)$ (ii) $(2, 1)$

(iii) $(1, -2)$ (iv) $(-1, 2)$

(ग) समाकलन $\int \sqrt{1+\sin 2x}\ dx$ का मान है : 1

(i) $\sin x + \cos x + c$ (ii) $\sin x - \cos x + c$

(iii) $\cos x - \sin x + c$ (iv) $-\cos x - \sin x + c$

(घ) यदि सदिश $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ और $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ एक दूसरे पर लम्ब हैं, तो λ का मान है : 1

(i) 3 (ii) 4

(iii) 6 (iv) 0

(ङ) अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{x+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ का घात है : 1

(i) 4 (ii) 3

(iii) 1 (iv) 2

2. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) दर्शाइए कि फलन $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$ $x = 0$ पर संतत नहीं है । 1

(ख) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए । 1

(ग) यदि $y = Ae^x + B$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$, जहाँ A तथा B अचर हैं । 1

(घ) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$ को हल कीजिए । 1

(ङ) किसी दौड़ में A के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है तथा B के जीतने की प्रायिकता $\frac{1}{4}$ है । इस दौड़ में, A और B में से कोई न जीत पाए, इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 1

3. *सभी* खण्ड कीजिए :

(क) प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N पर एक सम्बन्ध $R = \{(a, b) : a, b \in N \text{ तथा } a = b^2\}$ से व्यक्त किया गया है । क्या $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ सत्य है ? एक उदाहरण द्वारा पुष्टि कीजिए । 2

(ख) यदि $y = \frac{x^2 + 3x + 4}{e^x \cos x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए । 2

(ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^y \sin x$ को हल कीजिए । 2

(घ) एक पासे को एक बार उछाला जाता है । पासे पर प्राप्त संख्या जो 3 का अपवर्त्य है, को E से, और पासे पर प्राप्त संख्या जो सम है, को F से, निरूपित किया गया है । क्या E तथा F स्वतंत्र घटनाएँ हैं ? 2

4. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) अवकलन कीजिए : $y = (\cos x)^{\sin x}$ 2

(ख) किसी लीप ईयर (अधिवर्ष) में 53 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 2

(ग) बिन्दु (5, 2, −4) से जाने वाली तथा सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ के समान्तर रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए । 2

(घ) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$ का मान ज्ञात कीजिए । 2

5. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ से $B = \{1, 4, 5\}$ में सम्बन्ध R "छोटा है" हो, तो R से संबंधित क्रमित युग्मों का समुच्चय ज्ञात कीजिए तथा B से A तक सम्बन्ध को परिभाषित कीजिए । 5

(ख) x, y, z के मानों को ज्ञात कीजिए, यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$, समीकरण $A'A = I$ को सन्तुष्ट करता है । 5

(ग) x के सापेक्ष $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$ का अवकलन कीजिए । 5

(घ) निम्नलिखित अवरोधों के अन्तर्गत $z = x + 3y$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए : 5

$$x + y \leq 8,\ 3x + 5y \geq 15$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

(ङ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए । 5

6. ***सभी*** खण्ड कीजिए :

(क) *ऐसी दो धन संख्याओं को* ज्ञात कीजिए जिनका योगफल 15 है और जिनके वर्गों का योगफल न्यूनतम है । 5

(ख) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए । 5

(ग) सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ पर लम्ब इकाई सदिश ज्ञात कीजिए, तथा उनके बीच के कोण की ज्या (sine) भी ज्ञात कीजिए । 5

(घ) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए कि $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ जहाँ $n \in N$. 5

(ङ) एक प्रश्न को A तथा B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएँ क्रमश: $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ हैं । यदि दोनों स्वतंत्र रूप से प्रश्न हल करने का प्रयास करते हैं, तो (i) उनमें से कोई भी प्रश्न हल न कर पाए, (ii) कम-से-कम एक उसे हल कर ले, की प्रायिकता ज्ञात कीजिए । 5

7. कोई ***एक*** खण्ड कीजिए :

(क) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए । 8

(ख) निम्न समीकरणों के निकाय को आव्यूह विधि से हल कीजिए : 8

$2x + 3y + 3z = 5$

$x - 2y + z = -4$

$3x - y - 2z = 3$

8. कोई ***एक*** खण्ड कीजिए :

(क) अवकल समीकरण को हल कीजिए : 8

$(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$

(ख) अवकल समीकरण को हल कीजिए : 8

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$, यदि $y = 1$ जबकि $x = 1$

9. कोई ***एक*** खण्ड कीजिए :

(क) मान ज्ञात कीजिए : 8

$$\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि : 8

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1}(\sin x)\, dx = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Instructions :

(i) *First 15 minutes time has been allotted for the candidates to read the question paper.*

(ii) *There are in all **nine** questions in this question paper.*

(iii) ***All** questions are compulsory.*

(iv) *In the beginning of each question, the number of parts to be attempted has been clearly mentioned.*

(v) ***Marks** allotted to the questions are indicated against them.*

(vi) *Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.*

(vii) *Do not waste your time over a question you cannot solve.*

1. Do ***all*** parts :

Select the correct option of each part and write it on your answer book.

(a) If orders of matrices A and B are $p \times q$ and $q \times r$ respectively, then order of AB is : *1*

(i) $p \times r$ (ii) $r \times p$

(iii) $q \times p$ (iv) None of these

(b) At which point is the slope of the line $y = x + 1$ equal to the slope of the curve $y^2 = 4x$? *1*

(i) $(1, 2)$ (ii) $(2, 1)$

(iii) $(1, -2)$ (iv) $(-1, 2)$

(c) The value of the integral $\int \sqrt{1 + \sin 2x}\ dx$ is : *1*

(i) $\sin x + \cos x + c$ (ii) $\sin x - \cos x + c$

(iii) $\cos x - \sin x + c$ (iv) $-\cos x - \sin x + c$

(d) If vectors $5\hat{i} - \lambda\hat{j} + 2\hat{k}$ and $2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ are perpendicular to each other, then the value of λ is : *1*

(i) 3 (ii) 4

(iii) 6 (iv) 0

(e) *The degree of the* differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt[4]{x + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ is : *1*

(i) 4 (ii) 3

(iii) 1 (iv) 2

2. Do ***all*** the parts :

(a) Show that the function

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$ is not continuous at x = 0. *1*

(b) Find the principal value of $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$. *1*

(c) If $y = Ae^x + B$ where A, B are constants, then show that $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$. *1*

(d) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{1+y^2}$. *1*

(e) The probability of A winning the race is $\frac{1}{3}$ and that of B is $\frac{1}{4}$. In this race, find the probability that neither A nor B can win the race. *1*

3. Do ***all*** the parts :

(a) R is a relation on a set of natural numbers N defined by

$R = \{(a, b) : a, b \in N \text{ and } a = b^2\}$.

Is $(a, b) \in R, (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ true ? Justify it by one example. *2*

(b) If $y = \frac{x^2 + 3x + 4}{e^x \cos x}$, then find $\frac{dy}{dx}$. *2*

(c) Solve the differential equation $\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$. *2*

(d) A die is thrown once. The number on the die is a multiple of 3 is denoted by E, and the number on the die is even is denoted by F. Are E and F independent events ? https://www.upboardonline.com *2*

4. Do ***all*** the parts :

(a) Differentiate : $y = (\cos x)^{\sin x}$ *2*

(b) Find the probability of 53 Sundays in a leap year. *2*

(c) Find the vector equation of the line which passes through the point (5, 2, −4) and parallel to the vector $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$. *2*

(d) Find the value of :

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$ *2*

5. Do ***all*** the parts :

(a) If R is the relation "less than" from $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ to $B = \{1, 4, 5\}$, find the set of ordered pairs corresponding to R. Also define this relation from B to A. 5

(b) Find the values of x, y, z if the matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ satisfies the equation $A'A = I$. 5

(c) Differentiate : $y = x^x + (\cos x)^{\tan x}$ with respect to x. 5

(d) Find the minimum value of $z = x + 3y$ under the following constraints :

$x + y \leq 8,\ 3x + 5y \geq 15$

$x \geq 0,\ y \geq 0.$ 5

(e) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$. 5

6. Do ***all*** the parts :

(a) Find two positive numbers whose sum is 15 and the sum of their squares is minimum. 5

(b) Find the area of the circle $x^2 + y^2 = a^2$. 5

(c) Find the perpendicular unit vectors on the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ and find the sine of the angle between them. 5

(d) If $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, prove that $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ where $n \in N$. 5

(e) The probabilities of solving a question by A and B independently are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If both of them try to solve it independently, find *the probability that*

(i) none of them solved it.

(ii) at least one of them solved it. 5

7. Do any ***one*** part :

(a) If matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -4 & -4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1}. *8*

(b) Solve the system of equations by matrix method : *8*

$2x + 3y + 3z = 5$

$x - 2y + z = -4$

$3x - y - 2z = 3$

8. Do any ***one*** part :

(a) Solve the differential equation :

$(\tan^{-1} y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$

(b) Solve the differential equation : *8*

$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$, if $y = 1$ when $x = 1$

9. Do any ***one*** part :

(a) Evaluate : *8*

$$\int_0^{\pi} \frac{x\ dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

(b) Prove that : *8*

$$\int_0^{\pi/2} \sin 2x \tan^{-1} (\sin x)\, dx = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$